Двоичная и кратные ей системах счисления в некоторых заданиях ЕГЭ по информатике и ИКТ.

Арифметические операции в позиционных системах счисления производится по единому алгоритму. Так, сложение двоичных чисел происходит по классическому алгоритму «столбиком» с переносом числа, кратного двум, единицей в следующий разряд.

Рассмотрим этот алгоритм на примере двух двоичных чисел 1010101_2 и 110111_2:

Дописывание единицы	1	1	1		1	1	1	
Первое слагаемое		1	0	1	0	1	0	1
Второе слагаемое		0	1	1	0	1	1	1
Сумма	1	0	0	0	1	1	0	0

Результат сложения выглядит как 10001100_2. Проверим результат сложения, для чего переведем все числа в десятичную систему счисления:

$1010101_2=85_{10}$, $110111_2=55_{10}$, $10001100_2=140_{10}$, $85_{10}+55_{10}=140_{10}$.

Двоичная система, являющаяся основой компьютерной арифметики, весьма громоздка и неудобна для использования человеком. Поэтому программисты используют две кратные двоичной системы счисления: восьмеричную и шестнадцатеричную. В случае шестнадцатеричной системы арабских цифр не хватает, и в качестве цифр используются первые шесть заглавных букв латинского алфавита. Примеры записи натуральных чисел от 1 до 16 в четырех системах счисления помещены в **Таблице 1**.

Таблица 1. Примеры записи натуральных чисел от 1 до 16 в четырех системах счисления

10-чная	2-чная	8-чная	16-ичная
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Из **Таблицы 2** видно, что в двоичной системе запись чисел второй восьмерки (от 8 до 15) отличается от записи первой восьмерки (от 0 до 7) наличием единицы в четвертом (справа) разряде. На этом основан алгоритм перевода двоичных чисел в восьмеричные «по триадам». Для применения этого алгоритма надо разбить двоичное число на тройки цифр (считая справа) и записать вместо каждой из троек восьмеричную цифру:

$10101101_2 \rightarrow \underbrace{10}_{2}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{101}_{5} \rightarrow 255_8$.

Крайняя левая тройка может быть неполной (как в примере), для получения полных троек можно приписать слева недостающие нули.

Убедимся в правильности алгоритма:

$10101101_2 \rightarrow 1*2^7+1*2^5+1*2^3+2*2^1+1*2^0=173_{10}$;

$255_8 \rightarrow 2*2^6+5*2^3+5*2^0=173_{10}$.

Для перевода чисел из восьмеричной системы в двоичную используется обратный алгоритм: восьмеричные цифры заменяются на тройки двоичных цифр (при необходимости слева дописываются недостающие нули):

$325_8 \rightarrow \underbrace{3}_{011}\ \ \underbrace{2}_{010}\ \ \underbrace{5}_{101} \rightarrow 11\ 010\ 101 \rightarrow 11010101_2$.

Для перевода чисел из двоичной системы в шестнадцатеричную используется алгоритм «по тетрадам». Строка двоичных цифр разбивается на четверки и вместо них записываются шестнадцатеричные цифры:

$10101101_2 \rightarrow \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{1101}_{D} \rightarrow AD_{16}$.

Аналогично работает и обратный алгоритм: вместо шестнадцатеричных цифр подставляются четверки двоичных цифр.

Из восьмеричной системы в шестнадцатеричную и обратно проще переводить через двоичную систему:

$D5_{16} \rightarrow D\ 5 \rightarrow \underbrace{1101}_{D}\ \underbrace{0101}_{5} \rightarrow 11010101_2 \rightarrow \underbrace{11}_{3}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5} \rightarrow 325_8$.

При выполнении заданий на сложение чисел разных систем счисления их нужно перевести в одну систему счисления. Лучше всего пользоваться той системой, в которой должен быть представлен результат.

Задание 1. (*Задание А6 .*)

Вычислите значение суммы в десятичной системе счисления:

$10_2+10_8+10_{16} = ?_{10}$

Подсказка решения:

Перевести все числа в десятичную запись и осуществить сложение.

Ответ: 26.

Задание 2.

Найдите сумму x+y, если $x=1110101_2$, $y=1011011_2$. Ответ представьте в восьмеричной системе.

Подсказка решения:

Найдем сумму: $1110101_2 + 1011011_2$:

Дописывание единицы								
Первое слагаемое		1	1	1	0	1	0	1
Второе слагаемое		1	0	1	1	0	1	1
Сумма								

$1110101_2 + 1011011_2 = ?_2$

Переведем получившееся число из двоичной системы счисления в восьмеричную:

$\underbrace{11}\,\underbrace{010}\,\underbrace{000} \rightarrow ?_8$.

Ответ: 320.

Задание 3. (Задание В1)

В системе счисления с некоторым основанием число 12 записывается в виде 110. Найдите это основание.

Подсказка решения:

Обозначим искомое основание через n. Исходя из правил записи чисел в позиционных счислениях $110_n=1*n^2+1*n^1+0*n^0$. Составим квадратное уравнение и найдем корни: $n_1=?$, $n_2=?$. Корень – отрицательное число не подходит, так как основание системы счисления, по определению, натуральное число большее единицы. Проверьте, подходит ли корень положительный корень

Ответ: 3.

Задание 4.

В классе 1111_2 девочек и 1100_2 мальчиков. Сколько учеников в классе?

Подсказка решения:

$1111_2=?_{10}$.

$1100_2=??_{10.}$

$?_{10}+??_{10}=?_{10}$

Ответ: в классе 27 учеников.

Задание 5.

В саду 100_x фруктовых деревьев, из них 33_x яблони, 22_x груши, 16_x слив и 5_x вишен. В какой системе счисления посчитаны деревья?

Подсказка решения:

$100_x = 33_x + 22_x + 16_x + 5_x$

$1*x^2=3*x^1+3*x^0+2*x^1+2*x^0+ 1*x^1+6*x^0+5*x^0$

x – предполагаемое основание системы

- упростите выражение до квадратного уравнения в стандартной форме
- решите уравнения
- произведите анализ корней
- вберите корень уравнения являющийся основанием искомой системы счисления.

Ответ: деревья посчитаны в восьмеричной системе счисления.

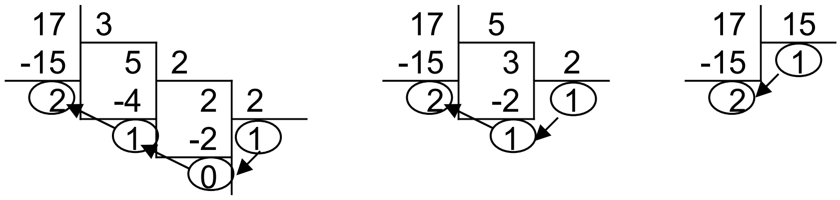
Задание 6.

Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 17 оканчивается на 2.

Подсказка решения:

Последняя цифра в записи числа представляет собой остаток от деления числа на основание системы счисления. Поскольку 17-2=15, то искомые основания систем счисления будут являться делителями 15, это:?, ??, ???.

Проверим наш ответ, представив число 17 в соответствующих системах счисления:



$17_{10} = ?_3$ $17_{10} = ?_5$ $17_{10} = ?_{15}$

Ответ: ?, ??, ???.

Задание 7.

В системе счисления с некоторым основанием число 17 записывается как 101. Укажите это основание.

Ответ: 4.