

## Двоичная арифметика

*Дорогие читатели. В данной статье излагается материал по информатике. Вам необходимо внимательно изучить этот материал, решить задачи, предложенные для самостоятельного решения, оформить их в отдельной тетради и выслать на адрес, указанный во вступительной статье.*

Числа, которыми мы привыкли пользоваться, называются десятичными и арифметика, которой мы пользуемся, также называется десятичной. Называются они так потому, что каждое число можно составить из набора цифр содержащего 10 символов - цифр - "0123456789".

Так исторически сложилось, что именно этот набор стал основным в записи чисел, но десятичная арифметика не единственная. Если мы возьмём только пять цифр, то на их основе можно построить пятеричную арифметику, из семи цифр - семеричную. В областях знаний, связанных с компьютерной техникой часто используют арифметику, в которой числа состоят из шестнадцати цифр, соответственно эта арифметика называется шестнадцатеричной. Чтобы понять, что такое число в не десятичной арифметике сначала вспомним, что такое число в десятичной арифметике.

Возьмём, к примеру, число 246. Его запись означает, что в числе две сотни, четыре десятка и шесть единиц. Следовательно, можно записать следующее равенство:

$$246 = 200 + 40 + 6 = 2 * 10^2 + 4 * 10^1 + 6 * 10^0$$

Здесь знаками равенства отделены три способа записи одного и того же числа. Для нас наиболее интересна третья форма записи:  $2 * 10^2 + 4 * 10^1 + 6 * 10^0$ . Она построена следующим образом:

В нашем числе три цифры. Старшая цифра "2" имеет номер 3. Так вот она умножается на 10 во второй степени. Следующая цифра "4" имеет порядковый номер 2 и умножается на 10 в первой степени. Уже видно, что цифры умножаются на десять в степени на единицу меньше порядкового номера цифры. Уяснив сказанное, мы можем записать общую формулу представления десятичного числа. Пусть дано число, в котором N цифр. Будем обозначать i-ю цифру через  $a_i$ . Тогда число можно записать в следующем виде:  $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ . Это первая форма, а третья форма записи будет выглядеть так:

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 = a_n * 10^{n-1} + a_{n-1} * 10^{n-2} + \dots + a_2 * 10^1 + a_1 * 10^0$$

где  $a_i$  это символ из набора "0123456789"

*В этой записи очень хорошо видна роль десятки. Десятка является основой образования числа. И, кстати, она так и называется "основание системы счисления", а сама система счисления называется "десятичной". Конечно, никакими особыми свойствами число десять не обладает. Мы вполне можем заменить десять на любое другое число. Например, число в пятеричной системе счисления можно записать так:*

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 = a_n * 5^{n-1} + a_{n-1} * 5^{n-2} + \dots + a_2 * 5^1 + a_1 * 5^0$$

где  $a_i$  это символ из набора "012345"

В общем, заменяем 10 на любое другое число и получаем совершенно другую систему счисления и другую арифметику. Наиболее простая арифметика получается, если заменить 10 на 2. Полученная система счисления называется двоичной и число в ней определяется следующим образом:

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 = a_n * 2^{n-1} + a_{n-1} * 2^{n-2} + \dots + a_2 * 2^1 + a_1 * 2^0$$

где  $a_i$  это символ из набора "01"

*Эта система - самая простая из всех возможных, так как в ней любое число образуется только из двух цифр 0 и 1.*

Примеры двоичных чисел: 10, 111, 101.

**Очень важный вопрос.** Можно ли двоичное число представить в виде десятичного числа и наоборот, можно ли десятичное число представить в виде двоичного.

**Двоичное в десятичное.** Это очень просто. Возьмём, к примеру, следующее двоичное число 1011. Разложим его по степеням двойки. Получим:

$$1001 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0$$

Выполним все записанные действия и получим:

$$1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 0 + 0 + 1 = 9.$$

Таким образом, получаем, что 1011(двоичное) = 9 (десятичное). Сразу видно и небольшое неудобство двоичной системы. То число, которое, в десятичной системе записано одним знаком в двоичной системе, для своей записи требует четырех знаков. Но это плата за простоту в других вещах (бесплатно ничего не бывает). Двоичная система даёт огромный выигрыш в арифметических действиях. Ниже мы подробно рассмотрим этот вопрос.

**Упражнение.** Представьте в виде десятичного числа следующие двоичные числа: а) 10010 б) 11101 в) 1010 г) 1110 д) 100011 е) 1100111 ж) 1001110

### **Сложение двоичных чисел**

Рассмотрим способ сложения “столбиком” (такой же, как и для десятичного числа).

Сложение в десятичной системе выполняется поразрядно, начиная с младшей цифры. Если при сложении двух цифр получается СУММА больше десяти, то записывается цифра 9, а СУММА МИНУС ДЕВЯТЬ, добавляется к следующему старшему разряду. (Сложите пару чисел столбиком, вспомните, как это делается.)

Аналогично выполняется сложение двоичных чисел.

*Складываем числа поразрядно, начиная с младшей цифры (она стоит крайней справа).*

- Если сумма равна 0 или 1 – она записывается в данный разряд числа - суммы,
- если сумма разрядов равна 2, то в соответствующий разряд числа - суммы записывается 0, а к сумме следующих разрядов прибавляется 1,
- если сумма разрядов оказалась равной 3 (а это может быть в случае, если у обоих слагаемых в данном разряде единицы и еще одна единица пришла после сложения в предыдущем разряде), то в соответствующем разряде числа - суммы записывается 1 и еще одна единица прибавляется к сумме следующих разрядов).

Рассмотрим **пример:** 10011 + 10001.

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \end{array}$$

*Первый разряд:* 1+1 = 2. Записываем 0 и 1 “на ум пошло”.

*Второй разряд:* 1+0+1 (запомненная единица) = 2. Записываем 0 и “1 на ум пошло”.

*Третий разряд:* 0+0+1(запомненная единица) = 1. Записываем 1.

*Четвертый разряд:* 0+0=0. Записываем 0.

*Пятый разряд:* 1+1=2. Записываем 0 и добавляем шестым разрядом 1.

Переведём все три числа в десятичную систему и проверим правильность сложения.

$$10011 = 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 16 + 2 + 1 = 19$$
$$10001 = 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 16 + 1 = 17$$
$$100100 = 1*2^5 + 0*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 0*2^0 = 32 + 4 = 36$$
$$17 + 19 = 36 - \text{верное равенство}$$

**Упражнения для самостоятельного решения:**

*Вычислить в двоичной системе*

- a)  $11001 + 101 =$
- б)  $11001 + 11001 =$
- с)  $1001 + 111 =$
- д)  $10011 + 101 =$
- e)  $11011 + 1111 =$
- д)  $11111 + 10011 =$

**Как десятичное число перевести в двоичное.** Сейчас на очереди следующая операция - вычитание. Но этой операцией мы займёмся немного позже, а сейчас рассмотрим метод преобразования десятичного числа в двоичное.

Для того чтобы преобразовать десятичное число в двоичное, его нужно разложить по степеням двойки. Для начала рассмотрим, как это делается методом подбора. Возьмём десятичное число 12.

Шаг первый.  $2^2 = 4$ , этого мало. Также мало и  $2^3 = 8$ , а  $2^4 = 16$  это уже много. Поэтому оставим  $2^3 = 8$ .  $12 - 8 = 4$ . Теперь нужно представить в виде степени двойки 4.

Шаг второй.  $4 = 2^2$ .

Тогда наше число  $12 = 2^3 + 2^2$ . Старшая цифра имеет номер 4, старшая степень = 3, следовательно, должны быть слагаемые со степенями двойки 1 и 0. Но они нам не нужны, поэтому чтобы избавиться от ненужных степеней, и оставить нужные запишем число так:  $1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 0*2^0 = 1100$  - это и есть двоичное представление числа 12. Нетрудно заметить, что каждая очередная степень - это наибольшая степень двойки, которая меньше разлагаемого числа.

Чтобы закрепить метод рассмотрим ещё один пример. Найти двоичную запись числа 23.

Шаг 1. Ближайшая степень двойки  $2^4 = 16$ .  $23 - 16 = 7$ .

Шаг 2. Ближайшая степень двойки  $2^2 = 4$ .  $7 - 4 = 3$

Шаг 3. Ближайшая степень двойки  $2^1 = 2$ .  $3 - 2 = 1$

Шаг 4. Ближайшая степень двойки  $2^0 = 1$ .  $1 - 1 = 0$

Получаем следующее разложение:  $1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$

Искомое двоичное число 10111

Рассмотренный выше метод дает хорошее решение поставленной задачи, но существует способ, который значительно лучше алгоритмизируется. Алгоритм этого метода записан ниже:

Пока ЧИСЛО больше нуля делать

Начало

ОЧЕРЕДНАЯ ЦИФРА = остаток от деления ЧИСЛА на 2

ЧИСЛО = целая часть от деления ЧИСЛА на 2

Конец

Когда этот алгоритм завершит свою работу, последовательность вычисленных ОЧЕРЕДНЫХ ЦИФР и будет представлять двоичное число. Для примера поработаем с числом 19.

Начало алгоритма ЧИСЛО = 19

Шаг 1

ОЧЕРЕДНАЯ ЦИФРА = 1

ЧИСЛО = 9

Шаг 2

ОЧЕРЕДНАЯ ЦИФРА = 1

ЧИСЛО = 4

Шаг 3

ОЧЕРЕДНАЯ ЦИФРА = 0

ЧИСЛО = 2

Шаг 4

ОЧЕРЕДНАЯ ЦИФРА = 0

ЧИСЛО = 1

Шаг 5

ОЧЕРЕДНАЯ ЦИФРА = 1

ЧИСЛО = 0

В результате получено число 10011. Заметьте, что два рассмотренных метода отличаются порядком получения очередных цифр. В первом методе первая полученная цифра - это старшая цифра двоичного числа, а во втором первая полученная цифра наоборот младшая.

*Преобразуйте десятичные числа в двоичные двумя способами*

а) 14 б) 29 в) 134 г) 158 е) 1190 ж) 2019

**Как преобразовать в десятичное число дробную часть.**

Известно, что любое рациональное число можно представить в виде десятичной и обыкновенной дроби. Обыкновенная дробь, то есть дробь вида  $A/B$  может быть правильной и неправильной. Дробь называется правильной если  $A < B$  и неправильной если  $A > B$ .

Если рациональное число представлено неправильной дробью, и при этом числитель дроби делится на знаменатель нацело, то данное рациональное число - число целое, во всех иных случаях возникает дробная часть. Дробная часть зачастую бывает очень длинным числом и даже бесконечным (бесконечная периодическая дробь, например  $20/6$ ), поэтому в случае с дробной частью у нас возникает не просто задача перевода одного представления в другое, а перевод с определённой точностью.

**Правило точности.** Предположим, дано десятичное число, которое в виде десятичной дроби представимо с точностью до  $N$  знаков. Для того чтобы соответствующее двоичное число было той же точности, в нём необходимо записать  $M$  - знаков, так что бы

$$2^m > 10^N$$

А теперь попробуем получить правило перевода, и для начала рассмотрим пример 5,401

*Решение:*

Целую часть мы получим по уже известным нам правилам, и она равна двоичному числу 101. А дробную часть разложим по степеням 2.

*Шаг 1:*  $2^{-2} = 0,25$ ;  $0,401 - 0,25 = 0,151$ . - это остаток.

*Шаг 2:* Сейчас необходимо степени двойки представить 0,151. Сделаем это:  $2^{-3} = 0,125$ ;  $0,151 - 0,125 = 0,026$

Таким образом, исходную дробную, часть можно представить в виде  $2^{-2} + 2^{-3}$ . То же самое можно записать таким двоичным числом: 0,011. В первом дробном разряде стоит ноль, это потому, что в нашем разложении степень  $2^{-1}$  отсутствует.

Из первого и второго шагов ясно, что это представление не точное и может быть разложение желательно продолжить. Обратимся к правилу. Оно говорит, что нам нужно столько знаков  $M$  чтобы  $10^3$  было меньше чем  $2^M$ . То есть  $1000 < 2^M$ . То есть в двоичном разложении у нас должно быть не менее десяти знаков, так как  $2^9 = 512$  и только  $2^{10} = 1024$ . Продолжим процесс.

*Шаг 3:* Сейчас работаем с числом 0,026. Ближайшая к этому числу степень двойки  $2^{-6} = 0,015625$ ;  $0,026 - 0,015625 = 0,010375$  теперь наше более точное двоичное число имеет вид: 0,011001. После запятой уже шесть знаков, но этого пока недостаточно, поэтому выполняем ещё один шаг.

*Шаг 4:* Сейчас работаем с числом 0,010375. Ближайшая к этому числу степень двойки  $2^{-7} = 0,0078125$ ;  
 $0,010375 - 0,0078125 = 0,0025625$

*Шаг 5:* Сейчас работаем с числом 0,0025625. Ближайшая к этому числу степень двойки  $2^{-9} = 0,001953125$ ;  
 $0,0025625 - 0,001953125 = 0,000609375$

Последний получившийся остаток меньше чем  $2^{-10}$  и если бы мы желали продолжать приближение к исходному числу, то нам бы понадобилось  $2^{-11}$ , но это уже превосходит требуемую точность, а, следовательно, расчёты можно прекратить и записать окончательное двоичное представление дробной части.

$$0,401 = 0,011001101$$

Как видно, преобразование дробной части десятичного числа в двоичное представление несколько сложнее, чем преобразование целой части. Для удобства пересчета в конце лекции приводится таблица степеней двойки.

*Запишем алгоритм преобразования:*

Исходные данные алгоритма: Буквой  $A$  будем обозначать исходную правильную десятичную дробь записанную в десятичной форме. Пусть эта дробь содержит  $N$  знаков.

**Алгоритм**

Действие 1. Определим количество необходимых двоичных знаков  $M$  из неравенства  $10^N < 2^M$

Действие 2: Цикл вычисления цифр двоичного представления (цифры после нуля). Номер цифры будем обозначать символом  $K$ .

1. Номер цифры = 1
2. Если  $2^{-k} > A$   
То в запись двоичного числа добавляем ноль  
Иначе
  - в запись двоичного числа добавляем 1
  - $A = A - 2^{-k}$
3.  $K = K + 1$
4. Если  $K > M$ 
  - то работа алгоритма завершена
  - Иначе переходим на пункт 2.

*Переведите десятичные числа в двоичные*

*а) 3,6 б) 12,0112 в) 0,231 г) 0,121 д) 23, 0091*

### **Вычитание двоичных чисел**

Вычитать числа, будем столбиком, как и в десятичной записи. Общее правило тоже, что и для десятичных чисел, вычитание выполняется поразрядно и если в разряде не хватает единицы, то она занимается в старшем разряде. Рассмотрим следующий пример:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ - \quad \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline = \quad \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

*Первый разряд.*  $1 - 0 = 1$ . Записываем 1.

*Второй разряд*  $0 - 1$ . Не хватает единицы. Занимаем её в старшем разряде. Единица из старшего разряда переходит в младший, как две единицы (потому что старший разряд представляется двойкой большей степени)  $2 - 1 = 1$ . Записываем 1.

*Третий разряд.* Единицу этого разряда мы занимали, поэтому сейчас в разряде 0 и есть необходимость занять единицу старшего разряда.  $2 - 1 = 1$ . Записываем 1.

Проверим результат в десятичной системе

$$1101 - 110 = 13 - 6 = 7 \text{ (111) Верное равенство.}$$

Еще один интересный способ выполнения вычитания связан с понятием дополнительного кода, который позволяет свести вычитание к сложению. Получается число в дополнительном коде исключительно просто, берём исходное число и заменяем в нем нули на единицы, единицы наоборот заменяем на нули и к младшему разряду добавляем единицу. Например, для числа 10010 дополнительный код будет 011011.

Правило вычитания через дополнительный код утверждает, что вычитание можно заменить на сложение если вычитаемое заменить на число в дополнительном коде.

Пример:  $34 - 22 = 12$

Запишем этот пример в двоичном виде.  $100010 - 10110 = 1100$

Дополнительный код числа 10110 будет такой:

$$01001 + 00001 = 01010.$$

Тогда исходный пример можно заменить сложением так:

$$100010 + 01010 = 101100.$$

Далее необходимо отбросить одну единицу в старшем разряде. Если это сделать то, получим 001100. Отбросим незначашие нули и получим 1100, то есть пример решён правильно

### Упражнения для самостоятельного решения

Выполните вычитания обычным способом и в дополнительном коде, переведя предварительно десятичные числа в двоичные:

- а)  $456 - 112$                       б)  $234 - 12$                       в)  $345 - 232$   
 з)  $456 - 78$                       д)  $567 - 109$                       е)  $67 - 45$

Выполните проверку, переведя двоичный результат в десятичную систему счисления.

### Умножение в двоичной системе счисления

Для начала рассмотрим следующий любопытный факт. Для того, чтобы умножить двоичное число на 2 (десятичная двойка это 10 в двоичной системе) достаточно к умножаемому числу слева приписать один ноль.

Пример.  $10101 * 10 = 101010$

Проверка.

$$10101 = 1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 16 + 4 + 1 = 21$$

$$101010 = 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 = 32 + 8 + 2 = 42$$

$$21 * 2 = 42$$

Если мы вспомним, что любое двоичное число разлагается по степеням двойки, то становится ясно, что умножение в двоичной системе счисления легко сводится к умножению на 10 (то есть на десятичную 2), а стало быть, умножение это ряд последовательных сдвигов. Общее правило таково: как и для десятичных чисел умножение двоичных выполняется поразрядно. И для каждого разряда второго множителя к первому множителю добавляется один ноль справа. Пример (пока не столбиком):

$$1011 * 101$$

Это умножение можно свести к сумме трёх поразрядных умножений:

$1011 * 1 + 1011 * 0 + 1011 * 100 = 1011 + 101100 = 110111$ . В столбик это же самое можно записать так:

$$\begin{array}{r}
 \phantom{1011} 1 \phantom{00} 1 \phantom{10} 1 \\
 * \phantom{1011} \phantom{00} 1 \phantom{10} 0 \phantom{10} 1 \\
 \hline
 1 \phantom{00} 0 \phantom{10} 1 \phantom{10} 1 \\
 0 \phantom{00} 0 \phantom{10} 0 \phantom{10} 0 \\
 1 \phantom{00} 0 \phantom{10} 1 \phantom{10} 1 \\
 \hline
 1 \phantom{00} 1 \phantom{10} 0 \phantom{10} 1 \phantom{10} 1 \phantom{10} 1
 \end{array}$$

Проверка:

$$101 = 5 \text{ (десятичное)}$$

$$1011 = 11 \text{ (десятичное)}$$

$$110111 = 55 \text{ (десятичное)}$$

$$5 * 11 = 55 \text{ верное равенство}$$

### Упражнения для самостоятельного решения.

Вычислить:

- а)  $1101 * 1110$                       б)  $1010 * 110$                       в)  $1011 * 11$   
 з)  $101011 * 1101$                       д)  $10010 * 1001$

Замечание: Таблица умножения в двоичной системе состоит только из одной строчки:  $1 * 1 = 1$

### Деление в двоичной системе счисления

Мы уже рассмотрели три действия и думаю уже понятно, что в общем-то действия над двоичными числами мало отличаются от действий над десятичными числами. Разница появляется только в том, что цифр две а не десять, но это только упрощает арифметические операции. Так же обстоит дело и с делением, но для лучшего понимания

алгоритм деления разберём более подробно. Пусть нам необходимо разделить два десятичных числа, например 234 разделить на 7. Как мы это делаем.

$$\begin{array}{r} 2 \ 3 \ 4 \ | \ 7 \\ \hline \end{array}$$

Выделяем справа (от старшего разряда) такое количество цифр, чтобы получившееся число было как можно меньше и в то же время больше делителя. 2 - меньше делителя, следовательно, необходимое нам число 23. Затем делим полученное число на делитель с остатком. Получаем следующий результат:

$$\begin{array}{r} 2 \ 3 \ 4 \ | \ 7 \\ - \ 2 \ 1 \ \phantom{0} \ | \ 3 \\ \hline 2 \ 4 \ \phantom{0} \ | \end{array}$$

Описанную операцию повторяем до тех пор, пока полученный остаток не окажется меньше делителя. Когда это случится, число полученное под чертой будет частным, а последний остаток – остатком от деления. Операция деления двоичного числа выполняется точно также. Рассмотрим пример.

**Пример:** Вычислить  $10010111 / 101$ .

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline \end{array}$$

Начиная со старшего разряда, ищем число, которое первое было бы больше чем делитель. Это четырехразрядное число 1001. Оно выделено жирным шрифтом. Теперь необходимо подобрать делитель выделенному числу. И здесь мы опять выигрываем в сравнении с десятичной системой. Дело в том, что подбираемый делитель это обязательно цифра, а цифры у нас только две. Так как 1001 явно больше 101, то с делителем всё понятно это 1. Выполним шаг операции.

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ 0 \ 1 \\ - \ 1 \ 0 \ 1 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \end{array}$$

Итак, остаток от выполненной операции 100. Это меньше чем 101, поэтому чтобы выполнить второй шаг деления, необходимо добавить к 100 следующую цифру, это цифра 0. Теперь имеем следующее число:

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ 0 \ 1 \\ - \ 1 \ 0 \ 1 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \end{array}$$

1000 больше 101 поэтому на втором шаге мы опять допишем в частное цифру 1 и получим следующий результат (для экономии места сразу опустим следующую цифру).

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ 0 \ 1 \\ - \ 1 \ 0 \ 1 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \\ - \ 1 \ 0 \ 1 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \end{array}$$

Третий шаг. Полученное число 110 больше 101, поэтому и на этом шаге мы запишем в частное 1. Получиться так:

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ 0 \ 1 \\ - \ 1 \ 0 \ 1 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \\ - \ 1 \ 0 \ 1 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \\ - \ 1 \ 0 \ 1 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \\ \hline 1 \ 1 \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ \phantom{0} \ | \end{array}$$

Полученное число 11 меньше 101 поэтому записываем в частное цифру 0 и опускаем вниз следующую цифру. Получается:

$$1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ 0 \ 1$$



$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 - \quad \begin{array}{r}
 \underline{1 \ 0 \ 1} \\
 \mathbf{1 \ 0 \ 0 \ 0} \\
 - \quad \underline{1 \ 0 \ 1} \\
 \phantom{-} \quad \underline{1 \ 1 \ 0} \\
 - \quad \underline{1 \ 0 \ 1} \\
 \phantom{-} \quad \quad \underline{1 \ 1 \ 1}
 \end{array} \\
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 \hline
 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Полученное число больше 101, поэтому в частное записываем цифру 1 и опять выполняем действия. Получается:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \mathbf{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1} \\
 - \quad \begin{array}{r}
 \underline{1 \ 0 \ 1} \\
 \mathbf{1 \ 0 \ 0 \ 0} \\
 - \quad \underline{1 \ 0 \ 1} \\
 \phantom{-} \quad \underline{1 \ 1 \ 0} \\
 - \quad \underline{1 \ 0 \ 1} \\
 \phantom{-} \quad \quad \underline{1 \ 1 \ 1} \\
 - \quad \quad \underline{1 \ 0 \ 1} \\
 \phantom{-} \quad \quad \quad \underline{1 \ 0 \ 1} \\
 \phantom{-} \quad \quad \quad \quad \underline{1 \ 0}
 \end{array} \\
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 \hline
 1 \ 0 \ 1 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Полученный остаток 10 меньше 101, но у нас закончились цифры в делимом, поэтому 10 это окончательный остаток, а 1110 это искомое частное.

Сделаем проверку в десятичных числах:

$$10010011 = 147$$

$$101 = 5$$

$$10 = 2$$

$$11101 = 29$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 \ 4 \ 7 \\
 - \quad \underline{1 \ 0} \\
 \phantom{-} \quad \underline{4 \ 7} \\
 - \quad \underline{4 \ 5} \\
 \phantom{-} \quad \quad \underline{2}
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 \hline
 5 \\
 \hline
 2 \ 9 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

На этом мы заканчиваем описание простейших арифметических операций, которые необходимо знать, для того, чтобы пользоваться двоичной арифметикой, и теперь попробуем ответить на вопрос "Зачем нужна двоичная арифметика". Конечно, выше уже было показано, что запись числа в двоичной системе существенно упрощает арифметические операции, но в то же время сама запись становится значительно длиннее, что уменьшает ценность полученного упрощения, поэтому необходимо поискать такие задачи, решение которых существенно проще в двоичных числах.

### Задача 1: Получение всех выборок

Очень часто встречаются задачи, в которых нужно уметь построить все возможные комбинации из заданного набора предметов. Например, такая задача:

*Дана большая куча камней, разложить камни по двум кучам таким образом, чтобы масса этих двух куч была как можно более близкой.*

Эту задачу можно сформулировать так:

*Найти такую выборку камней из большой кучи, что её общая масса будет как можно менее отличаться от половины массы большой кучи.*

Задач такого сорта довольно много. И все они сводятся, как уже было сказано, к умению получить все возможные комбинации (далее мы будем называть их выборками)

из заданного набора элементов. И сейчас мы рассмотрим общий метод получения всех возможных выборок с использованием операции сложения двоичных чисел. А начнём с примера. Пусть есть множество из трёх предметов. Построим все возможные выборки. Предметы будем обозначать порядковыми номерами. То есть, имеются следующие предметы: 1, 2, 3.

Выборки: (0, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1);

Если в позиции с очередным номером стоит единица, то это означает, что элемент с номером равным этой позиции присутствует в выборке, а если стоит ноль, то элемент не присутствует. Например, выборка (0, 1, 0); состоит из одного элемента с номером 2, а выборка (1, 1, 0); состоит из двух элементов с номерами 1 и 2.

Из этого примера ясно видно, что выборку можно представить в виде двоичного числа. Кроме того, нетрудно заметить, что выше записаны все возможные одно, двух и трехзначные двоичные числа. Перепишем их следующим образом:

001; 010; 011; 100; 101; 110; 111

Будем считать младшим разрядом первый справа, отбросим незначащие нули (то есть нули в старших разрядах до первой единицы), и получим следующий ряд:

1; 10; 11; 100; 101; 110; 111

Мы получили ряд последовательных двоичных чисел, каждое из которых получается из предыдущего прибавлением единицы. Можете это проверить. Используя эту замеченную закономерность можно построить следующий алгоритм получения выборок.

#### *Исходные данные алгоритма*

Дан набор предметов  $N$  - штук. Далее будем называть этот набор множеством исходных элементов. Пронумеруем все элементы исходного множества от 1 до  $N$ . Составим двоичное число из  $N$  незначащих нулей.  $0000\dots 0_N$  Это нулевое двоичное число будет обозначать нулевую выборку с которой и начнётся процесс составления выборок. Разряды числа считаются справа налево, то есть самый левый разряд это самый старший.

Договоримся обозначать это двоичное число большими буквами ДВОИЧНОЕ

#### *Алгоритм*

Если ДВОИЧНОЕ число состоит целиком из единиц

То прекращаем работу алгоритма

Иначе

Начало

- Прибавляем к ДВОИЧНОМУ числу единицу по правилам двоичной арифметики.
- Из полученного ДВОИЧНОГО числа составляем очередную выборку, как было описано выше.

Конец

## **Задача 2: Поиск больших простых чисел**

Для начала вспомним, что простым числом называется такое натуральное число, которое делится только на 1 и на само себя. Примеры простых чисел: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

Поиск больших простых чисел - очень важная математическая задача. Большие простые числа необходимы для надёжного шифрования сообщений некоторыми алгоритмами шифрования. Причём необходимы не просто большие числа, а очень большие. Чем число больше, тем надёжнее шифр, построенный на этом числе.

*Примечание. Надёжным шифром называется такой шифр, для расшифровки которого нужно очень большое время.*

Почему? Простое число играет роль ключа при шифровке и дешифровке. Кроме того, мы знаем, что простые числа встречаются в ряду натуральных чисел не слишком часто. Их достаточно много среди первой тысячи, потом их количество начинает быстро убывать. Поэтому если в качестве ключа мы возьмём не очень большое число, дешифровальщик с помощью даже не очень быстрого компьютера сможет до него добраться (перебирая в качестве ключа все простые одно за другим) за ограниченное время.

Достаточно надёжный код можно получить если взять простое в котором, например 150 знаков. Однако, найти такое простое не так просто. Предположим, что некоторое число  $A$  (очень большое) нужно проверить на простоту. Это тоже самое, что поискать его делители. Если мы сможем найти делители в интервале от 2 до корень квадратный из  $A$ , то оно не простое. Оценим количество чисел которые необходимо проверить на способность разделить число  $A$ .

Предположим число  $A$  имеет 150 знаков. Корень квадратный из него будет содержать не менее 75 знаков. Чтобы перебрать такое количество возможных делителей нам потребуется очень мощный компьютер и огромное время, а это означает, что задача практически не решаема.

### ***Как с этим бороться***

Во-первых, можно поучиться быстрее осуществлять проверку на делимость одного числа на другое, во-вторых можно попытаться число  $A$  подбирать таким образом, чтобы оно было простым с высокой степенью вероятности. Оказывается это возможно. Математик Мерсен обнаружил, что числа следующего вида

$$2^n - 1$$

Являются простыми с высокой степенью вероятности.

Чтобы понять написанную выше фразу, посчитаем, сколько простых чисел находится в первой тысяче, и сколько чисел Мерсена в этой же тысяче являются простыми. Итак, числа Мерсена в первой тысяче - это следующие:

$$2^1 - 1 = 1; 2^2 - 1 = 3; 2^3 - 1 = 7; 2^4 - 1 = 15; 2^5 - 1 = 31; 2^6 - 1 = 63; \\ 2^7 - 1 = 127; 2^8 - 1 = 255; 2^9 - 1 = 511;$$

Жирным шрифтом помечены простые числа. Всего на 9 чисел Мерсена 5 простых. В процентах это  $5/9 * 100 = 55,6\%$ . В то же время на 1000 первых натуральных чисел только 169 простых. В процентах это  $169/1000 * 100 = 16,9\%$ . То есть в первой тысяче в процентном отношении простые среди чисел Мерсена встречаются почти в 4 раза чаще, чем среди просто натуральных чисел

А теперь возьмём конкретное число Мерсена, например  $2^4 - 1$ . Запишем его в виде двоичного числа.

$$2^4 - 1 = 10000 - 1 = 1111$$

Возьмём следующее число Мерсена  $2^5 - 1$  и запишем его двоичным числом. Получим следующее:

$$2^5 - 1 = 100000 - 1 = 11111$$

Уже видно, что все числа Мерсена представляют собой последовательность единиц, и уже сам этот факт даёт большой выигрыш. Во-первых, в двоичной системе счисления очень просто получить очередное число Мерсена. Для этого достаточно к очередному числу дописать единицу. Во-вторых, искать делители в двоичной системе на много проще, чем в десятичной.

### Быстрый перевод десятичного числа в двоичное

Одна из главных проблем использования двоичной системы счисления - это сложность при переводе десятичного числа в двоичное. Это довольно трудоёмкое дело. Конечно, небольшие числа трёх или четырехзначные перевести не слишком сложно, но для десятичных чисел, в которых 5 и более знаков это уже затруднительно. То есть нам нужен способ, позволяющий быстро переводить в двоичное представление большие десятичные числа.

Такой способ был придуман французским математиком Лежандром. Пусть, например, дано число 11183445. Делим его на 64, получается остаток 21 и частное 174741. Это число делим опять на 64, получается в остатке 21 и частное 2730. Наконец, 2730, деленное на 64, даёт в остатке 42 и частное 42. Но 64 в двоичной системе есть 1000000, 21 в двоичной системе - 10101, а 42 есть 101010, Поэтому, исходное число запишется в двоичной системе следующим образом:

$$\begin{array}{cccc} 42 & 42 & 21 & 21 \\ \mathbf{101010} & \mathbf{101010} & \mathbf{010101} & \mathbf{010101} \end{array}$$

Чтобы было более понятно, ещё один пример с числом поменьше. Переведём в двоичное представление число 235. Поделим 235 на 64 с остатком. Получим:

$$\text{ЧАСТНОЕ} = 3, \text{ двоичное } 11 \text{ или } 000011$$

$$\text{ОСТАТОК} = 43, \text{ двоичное } 101011$$

Тогда  $235 = 11101011$ , Проверим этот результат:

$$11101011 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 8 + 2 + 1 = 235$$

Примечания:

1. Нетрудно заметить, что в окончательное двоичное число включаются все остатки и на последнем шаге и остаток и частное.
2. Частное записывается перед остатком.
3. Если полученное частное или остаток имеют меньше 6 разрядов, в двоичном представлении (6 нулей содержит двоичное представление числа  $64 = 1000000$ ), то к нему добавляются незначащие нули.

И еще один сложный пример. Число 25678425.

**Шаг 1: 25678425 делим на 64**

$$\text{Частное} = 401225$$

$$\text{Остаток} = 25 = 011001$$

**Шаг 2: 401225 делим на 64**

$$\text{Частное} = 6269$$

$$\text{Остаток} = 9 = 001001$$

**Шаг 3: 6269 делим на 64**

$$\text{Частное} = 97$$

Остаток = 61 = 111101

**Шаг 4: 97 делим на 64**

Частное = 1 = 000001

Остаток = 33 = 100001

Число результат = 1.100001.111101.001001.011001

В этом числе точкой отделены входящие в него промежуточные результаты.

**Упражнения для самостоятельного решения.**

Переведите в двоичное представление числа:

а) 67579

б) 8765469

в) 76543876

г) 567631113

д) 9809090654

**ПРИЛОЖЕНИЕ: ТАБЛИЦА 1**

N	$2^N$	$2^{-N}$
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125
4	16	0,0625
5	32	0,03125
6	64	0,015625
7	128	0,0078125
8	256	0,00390625
9	512	0,001953125
10	1024	0,0009765625
11	2048	0,00048828125
12	4096	0,000244140625
13	8192	0,0001220703125
14	16384	0,00006103515625
15	62768	0,000030517578125
16	65536	0,0000152587890625
17	131072	0,00000762939453125
18	262144	0,000003814697265625
19	524288	0,0000019073486328125
20	1048576	0,00000095367431640625
21	4194304	0,000000476837158203125
22	8388608	0,0000002384185791015625
23	16777216	0,00000011920928955078125
24	33554432	0,000000059604644775390625
25	67108864	0,0000000298023223876953125